

Równania ruchu konstrukcji głównej z dołączonymi wielokrotnymi, strojonymi tłumikami masowymi

Piotr Wielgos

*Katedra Mechaniki Budowli, Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Lubelska,
e-mail: p.wielgos@pollub.pl*

Streszczenie: W artykule przedstawiono matematyczny model konstrukcji głównej z wbudowanymi wielokrotnymi strojonymi tłumikami drgań. Bardzo ważną kwestią, związaną z tym modelem jest budowa globalnej macierzy tłumienia ustroju. Przedstawione zostaną własne propozycje elementów MES, opisujących dodatkowe elementy dołączone do ustroju głównego w postaci strojonych tłumików drgań. Omówione zostaną także korzyści płynące z zastosowania nowych elementów MES.

Słowa kluczowe: wielokrotne strojone tłumiki masowe, globalna macierz tłumienia, elementy MES.

1. Wstęp

Niniejszy artykuł jest rozwinięciem artykułu Wielgos (2011) [1]. W niniejszej pracy skupiono się na pasywnej metodzie redukcji drgań, w szczególności na budowie macierzy tłumienia ustroju z dołączonymi strojonymi, masowymi tłumikami drgań.

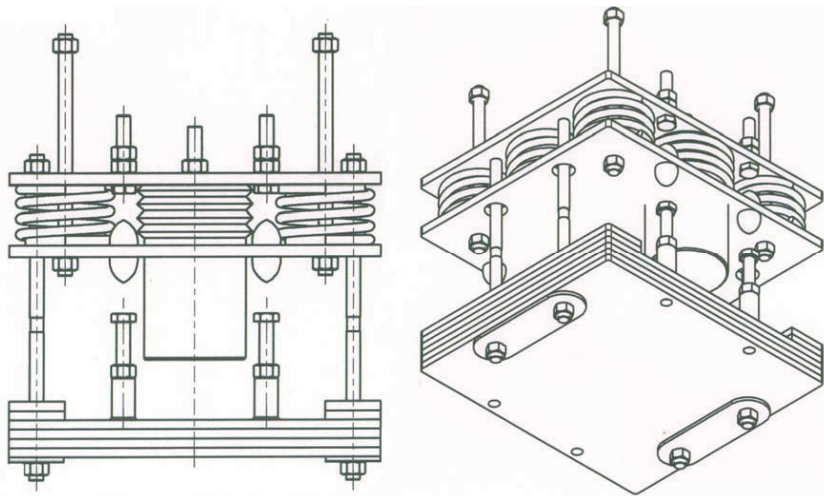
W pierwszej części pracy przedstawione zostaną podstawowe dane o pasywnych wiskotycznych tłumikach drgań, następnie omówione zostaną sposoby wbudowania ich w konstrukcję główną. Kończącym efektem pracy jest propozycja własnych elementów MES opisujących dodatkowe elementy dołączone do ustroju głównego w postaci strojonych tłumików masowych. Modele elementów MES zostały omówione także w pracy Wielgos (2010) [2].

2. Strojone tłumiki masowe (STM)

Strojony tłumik masowy (czasem nazywany dynamicznym tłumikiem drgań) składa się z dodatkowo dołączonej masy do konstrukcji głównej, za pomocą więzów o właściwościach sprężystych oraz tłumiących. Redukcję drgań uzyskuje się poprzez przepływ i rozpraszanie energii pomiędzy konstrukcją główną a STM. Strojony tłumik masowy, jak sama nazwa mówi, jest „nastrojony” na konkretną wartość $\omega_t = \omega_i$ (lub na wartość bliską tej częstości $\omega_t \cong \omega_i$) wybranej częstości drgań własnych konstrukcji głównej. Zastosowany STM wytłumia w zasadzie tą częstość, na którą został nastrojony, w ogólności jednak w przypadku występowania kilku bliskich sobie częstości drgań własnych i umiejscowieniu tłumika w miejscu, gdzie rzędne postaci drgań własnych są znaczące, będzie on także tłumił te częstości drgań własnych. Zazwyczaj bliskie sobie częstości drgań własnych występują w ustrojach

bardzo złożonych, takich jak przekrycia wielkopołaciowe, mosty czy kładki podwieszane lub wiszące.

Schematyczny rysunek takiego tłumika, działającego na kierunku pionowym, przedstawiono na Rys. 1.

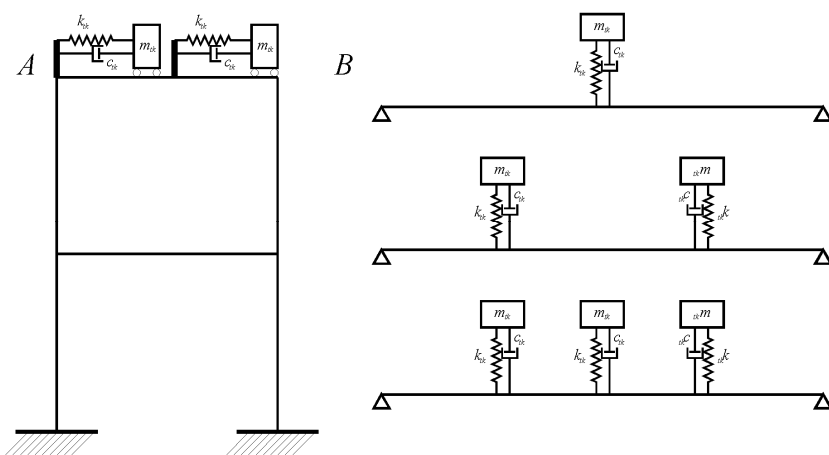


Rys. 1. Schemat strojonego tłumika masowego – STM.

Fig. 1. Scheme of the tuned mass damper –TMD.

3. Sposoby wbudowania tłumików drgań w konstrukcję główną

W przypadku strojonych tłumików masowych istnieje wiele różnorodnych wariantów ich wbudowania. Podstawowym kryterium umieszczenia STM na konstrukcji jest ich usytuowanie. STM lokuje się w miejscach największych rzędnych postaci drgań dla częstości, na którą STM został „nastrojony”. Przykładowe rozmieszczenie tłumików pokazano na Rys. 2.



Rys. 2. Schemat strojonych tłumików masowych STM w konstrukcję główną.

Fig. 2. Scheme of tuned mass dampers (TMD) built into the main structure.

Na schemacie A przedstawiono dwa tłumiki STM działające na kierunku X , które mogą być nastrojone na pierwszą częstość drgań własnych ustroju. Można także nastroić jeden z nich na drugą częstość drgań własnych. W przypadku schematu B mamy do czynienia z ustrojem belkowym, w którym możliwe jest nastrojenie na pierwszą giętną częstość drgań własnych, lub tylko drugą. Może także wystąpić przypadek, kiedy środkowy tłumik nastrojony jest na pierwszą częstość drgań własnych, zaś dwa pozostałe na drugą częstość drgań własnych ustroju. W przypadku zastosowania kilku STM na konstrukcji można wprowadzić nazwę *wielokrotne, strojone tłumiki drgań* (WSTM).

Każdy dodatkowo zamontowany STM, wiąże się z wprowadzeniem do ustroju nowego stopnia swobody, który związany jest z ruchem masy tłumika na kierunku jego działania.

4. Równania ruchu układu głównego z dołączonymi WSTM

Podobnie jak w przypadku ustroju, składającego się z podstruktur wykonanych z różnych materiałów, tak i w przypadku dołączenia WSTM do układu głównego, poszczególne macierze modelu można rozbić na dwie podmacierze:

- konstrukcja główna (przez N – oznaczmy stopnie swobody układu głównego);
- dołączone WSTM (przez N_t – oznaczmy liczbę dołączonych tłumików).

Równania ruchu mogą być wtedy zapisane w postaci:

$$(\mathbf{M}_{KG} + \mathbf{M}_T)\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C}_{KG} + \mathbf{C}_T)\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_{KG} + \mathbf{K}_T)\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (1)$$

Globalna liczba stopni swobody układu będzie wynosić $N + N_t$ (każdy tłumik zestawu WSTM powoduje zwiększenie globalnej liczby stopni swobody o jeden). Poniżej przedstawiono postacie macierzy \mathbf{C}_T , \mathbf{K}_{KG} , \mathbf{M}_T , przy założeniu, że dodatkowe stopnie swobody wynikające z zastosowania WSTM występują z ostatnimi numerami:

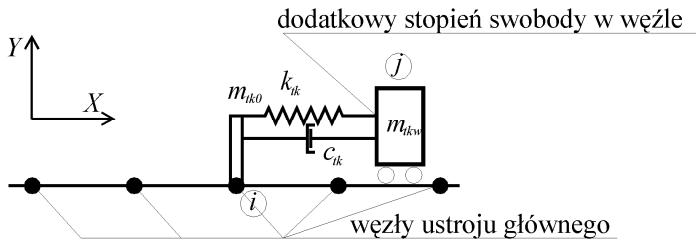
$$\mathbf{M}_{KG} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{K;N,N} & \mathbf{0}_{N,N_t} \\ \mathbf{0}_{N_t,N} & \mathbf{0}_{N_t,N_t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{KG} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{K;N,N} & \mathbf{0}_{N,N_t} \\ \mathbf{0}_{N_t,N} & \mathbf{0}_{N_t,N_t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{KG} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{K;N,N} & \mathbf{0}_{N,N_t} \\ \mathbf{0}_{N_t,N} & \mathbf{0}_{N_t,N_t} \end{bmatrix} \quad (2)$$

W przypadku konstrukcji wielomateriałowych, składających się z materiałów o różnych właściwościach sprężystych czy też o różnych właściwościach tłumiących, macierze \mathbf{M}_K , \mathbf{K}_K , \mathbf{C}_K , należy budować według znanych modeli np. Rayleigha czy Cogeya

Przejdźmy teraz do macierzy związanych z wydzieloną podstrukturą WSTM. Każdy ze strojonych tłumików masowych (STM) wprowadza dodatkowo jeden stopień swobody układu. Poniżej zostanie przedstawiony sposób budowy poszczególnych macierzy w przypadku ustroju dwuwymiarowego, a następnie jego uogólnienie na układ przestrzenny. Wprowadzone zostaną pojęcia elementu STM–2D oraz elementu STM–3D. Są to całkowicie nowe elementy MES, które mogą być zastosowane w programach obliczeniowych MES.

4.1. Element STM-2D

Na poniższym rysunku przedstawiono schemat dołączenia STM do ustroju głównego. Dołączenie STM do ustroju głównego, powoduje wprowadzenie dodatkowego stopnia swobody, na kierunku działania STM. Dlatego też wprowadzono węzeł j , w którym uwzględniono dodatkowy stopień swobody układu STM. Węzeł i odpowiada węzłowi, do którego dołączany jest tłumik zaś węzeł j jest węzłem swobodnym (Rys. 3).



Rys. 3. Schemat dołączenia STM-2D do ustroju głównego.

Fig. 3. TMD-2D attaching to the main system scheme.

Masa k -tego STM – m_{tk} , składa się z masy związanej z konstrukcją STM – m_{tk0} oraz z masy własnej (drgającej) – m_{tkw} :

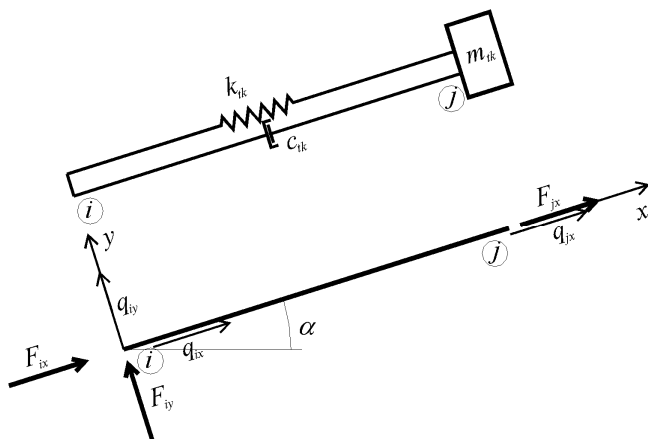
$$m_{tk} = m_{tkw} + m_{tk0} \quad (3)$$

W celu uniknięcia skomplikowanego opisu sił działających na ustrój główny na kierunku prostopadłym do kierunku działania STM (siły bezwładności od masy m_{tkw} w ogólności mogą oddziaływać na różne węzły ustroju głównego), przyjęto założenie upraszczające w postaci skupienia tych sił w węźle i , do którego dołączany jest k -ty STM. W węźle i do którego dołączany jest STM, skupiona jest więc: masa konstrukcji STM (m_{tk0}) na obu kierunkach X , Y oraz masa drgająca (m_{tkw}) na kierunku prostopadłym do kierunku działania STM (Y). W węźle j , tj. na dodatkowym stopniu swobody, skupiona jest cała masa własna (m_{tkw}) na kierunku działania STM (X).

W ogólności węzeł j ma te same współrzędne co węzeł i , i jak stwierdzono wcześniej, służy on tylko do ujednolicenia opisu sił na dodatkowym stopniu swobody (dodatkowy stopień swobody w węźle i).

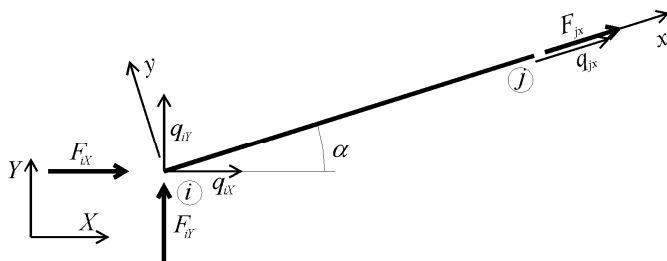
Kierunek działania elementu STM-2D, w ogólności, nie musi się pokrywać z globalnym układem współrzędnych. Na Rys. 4 oraz Rys. 5 przedstawiono schemat elementu tłumika STM-2D oraz sił, działających na element w układzie lokalnym i globalnym.

Kierunek działania STM określa wektor kierunkowy w globalnym układzie współrzędnych XY w postaci $w_k = [L_x, L_y]$. Pojedynczy STM może wykonywać drgania tylko po kierunku x lokalnego układu współrzędnych, a więc z założenia $q_{iy} = q_{iy}$, oraz $F_{iy} = 0$. Transformacji do układu globalnego podlegają wielkości sił i przemieszczeń węzła początkowego i , zaś w węźle j pozostawiany jest układ lokalny (jest to zagadnienie znane w MES przy uwzględnianiu podpory ukośnej przy budowie globalnej macierzy K).



Rys. 4. Schemat elementu strojonego tłumika masowego (STM-2D) w układzie lokalnym.

Fig. 4. Scheme of the tuned mass damper element (TMD-2D) in the local coordinate system.



Rys. 5. Schemat elementu strojonego tłumika masowego (STM-2D) w układzie globalnym.

Fig. 5. Scheme of the tuned mass damper element (TMD-2D) in the global coordinate system.

Element k – ty (k – ty WSTM) ma następujące dane $m_{tk} = m_{tkw} + m_{tk0}$, k_{tk} , c_{tk} . Wektory przemieszczeń węzłów elementu oraz sił węzłowych w układzie lokalnym będą miały następującą postać:

$$\mathbf{q}_k^e = \begin{bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{jx} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_k^e = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \end{bmatrix} \quad (4)$$

zaś w układzie globalnym:

$$\mathbf{q}_k^e = \begin{bmatrix} q_{iX} \\ q_{iY} \\ q_{jX} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_k^e = \begin{bmatrix} q_{iX} \\ q_{iY} \\ q_{jX} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_k^e = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_k^e = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Macierze \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e dla k – tego WSTM w lokalnym układzie współrzędnych mają następującą postać:

$$\mathbf{M}_k^e = \begin{bmatrix} m_{tk0} & 0 & 0 \\ 0 & m_{tk0} + m_{tkw} & 0 \\ 0 & 0 & m_{tkw} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_k^e = \begin{bmatrix} k_{tk} & 0 & -k_{tk} \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{tk} & 0 & k_{tk} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_k^e = \begin{bmatrix} c_{tk} & 0 & -c_{tk} \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_{tk} & 0 & c_{tk} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Jak widać z powyższych postaci macierzy \mathbf{K}_k^e , macierz elementu STM jest bardzo podobna do macierzy sztywności płaskiego elementu kratownicowego. Natomiast w macierzy mas \mathbf{M}_k^e występuje różnica w postaci skupienia całej masy własnej na kierunku x w węźle j , zaś na kierunku y w węźle i (w przypadku płaskiego elementu kratowego macierz jest diagonalna).

Zazwyczaj masa konstrukcji STM – m_{tk0} , może zostać zaniedbana, jako o rząd wielkości mniejsza od masy własnej STM – m_{tkw} . Macierz mas elementu STM–2D, w układzie lokalnym, może wtedy zostać zapisana w formie:

$$\mathbf{M}_k^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{tkw} & 0 \\ 0 & 0 & m_{tkw} \end{bmatrix} \quad (7)$$

W dalszych rozważaniach przyjęto więc uproszczenie:

$$m_{tk} = m_{tkw} \quad (8)$$

Dla pojedynczego elementu k możemy zapisać następujące równanie równowagi dynamicznej:

$$\mathbf{M}_k^e \ddot{\mathbf{q}}^e(t) + \mathbf{C}_k^e \dot{\mathbf{q}}^e(t) + \mathbf{K}_k^e \mathbf{q}^e(t) = \mathbf{f}^e(t) \quad (9)$$

Transformacja poszczególnych macierzy elementu z układu lokalnego do globalnego odbywa się za pomocą znanych z MES wzorów (por. Rakowski i in., 1992 [3]):

$$\mathbf{q}^e(t) = \mathbf{R}^e \mathbf{q}^e(t) \quad \mathbf{q}^e(t) = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{q}^e(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{f}^e(t) = \mathbf{R}^e \mathbf{f}^e(t) \quad \mathbf{f}^e(t) = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{f}^e(t) \quad (11)$$

gdzie macierz obrotu elementu jest dana wzorem:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Macierz \mathbf{R}_i jest macierzą obrotu węzła początkowego, zaś macierz \mathbf{R}_j węzła końcowego nie podlega obrotowi. Macierz obrotu węzła początkowego dana jest wzorem:

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie: $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$.

Mnożąc lewostronnie równanie (9) przez \mathbf{R}^e oraz, uwzględniając związek otrzymujemy równanie ruchu w układzie globalnym:

$$\mathbf{R}^e \mathbf{M}_k^e (\mathbf{R}^e)^T \ddot{\mathbf{q}}^e(t) + \mathbf{R}^e \mathbf{C}_k^e (\mathbf{R}^e)^T \dot{\mathbf{q}}^e(t) + \mathbf{R}^e \mathbf{K}_k^e (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{q}^e(t) = \mathbf{R}^e \mathbf{f}^e(t) \quad (14)$$

Poszczególne macierze w układzie globalnym będą miały następującą postać:

$$\mathbf{M}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{M}_k^e (\mathbf{R}^e)^T \quad \mathbf{M}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{M}_k^e (\mathbf{R}^e)^T \quad (15)$$

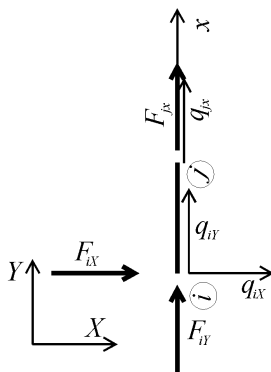
$$\mathbf{K}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \quad \mathbf{K}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{C}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \quad \mathbf{C}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{C}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \quad (17)$$

Jeżeli układ lokalny k -tego WSTM jest zgodny z układem globalnym ($c = 1$, $s = 0$) to macierze, \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e są odpowiednio równe \mathbf{M}_k^{ie} , \mathbf{K}_k^{ie} , \mathbf{C}_k^{ie} .

Jeżeli układ lokalny jest obrócony o $\pi/2$ ($c = 0$, $s = 1$, por. Rys. 6), to po wymnożeniu przez macierze obrotów elementu macierzy w lokalnym układzie współrzędnych, uzyskujemy następujące wzory na macierze \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e :

$$\mathbf{M}_k^e = \begin{bmatrix} m_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ik} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_k^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ik} & -k_{ik} \\ 0 & -k_{ik} & k_{ik} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_k^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{ik} & -c_{ik} \\ 0 & -c_{ik} & c_{ik} \end{bmatrix} \quad (18)$$



Rys. 6. Schemat STM-2D obróconego o $\pi/2$, w układzie globalnym.

Fig. 6. Scheme of TMD-2D turned of the angle $\pi/2$, in the global coordinate system.

Jeżeli przepiszemy równanie macierzowe dla tego przypadku do standardowej postaci otrzymamy:

$$F_{ix} = m_{ik} \ddot{q}_{ix}(t) \quad (19)$$

$$F_{iy} = c_{ik} (\dot{q}_{iy}(t) - \dot{q}_{jy}(t)) + k_{ik} (q_{iy}(t) - q_{jy}(t)) \quad (20)$$

$$F_{jx} = m_{ik} \ddot{q}_{jx}(t) + c_{ik} (\dot{q}_{jx}(t) - \dot{q}_{iy}(t)) + k_{ik} (q_{jx}(t) - q_{iy}(t)) \quad (21)$$

Zazwyczaj w węźle j nie działa żadne obciążenie zewnętrzne, gdyż wiązałoby się to z przykładaniem obciążenia bezpośrednio do tłumika. Jeżeli teraz porównamy równanie (21) z równaniem dla układu o dwóch stopniach swobody:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1(t) + c_1 \dot{q}_1(t) + c_2 (\dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t)) + k_1 q_1(t) + k_2 (q_1(t) - q_2(t)) &= p(t) \\ m_2 \ddot{q}_2(t) + c_2 (\dot{q}_2(t) - \dot{q}_1(t)) + k_2 (q_2(t) - q_1(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

to należy stwierdzić, iż otrzymaliśmy identyczną formułę. Wartości sił F_{ix} , F_{iy} należy przyłożyć do warunków równowagi węzła i . Jak widać ze wzoru (19), na węzeł początkowy przyłożona jest siła bezwładności F_{ix} prostopadła do kierunku działania STM oraz siła F_{iy} dana wzorem (20).

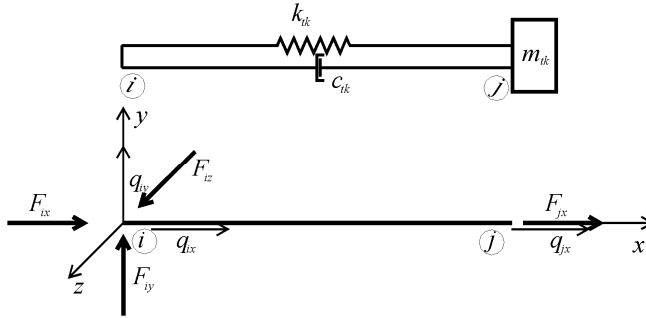
Podamy jeszcze postacie macierzy \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e dla układu obróconego o $\pi/4$ ($c = s = \sqrt{2}/2$):

$$\mathbf{M}_k^e = \begin{bmatrix} \frac{m_{tk}}{2} & \frac{-m_{tk}}{2} & 0 \\ \frac{-m_{tk}}{2} & \frac{m_{tk}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{tk} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_k^e = \begin{bmatrix} \frac{k_{tk}}{2} & \frac{k_{tk}}{2} & \frac{-\sqrt{2}k_{tk}}{2} \\ \frac{k_{tk}}{2} & \frac{k_{tk}}{2} & \frac{-\sqrt{2}k_{tk}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}k_{tk}}{2} & \frac{-\sqrt{2}k_{tk}}{2} & k_{tk} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{C}_k^e = \begin{bmatrix} \frac{c_{tk}}{2} & \frac{c_{tk}}{2} & \frac{-\sqrt{2}c_{tk}}{2} \\ \frac{c_{tk}}{2} & \frac{c_{tk}}{2} & \frac{-\sqrt{2}c_{tk}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}c_{tk}}{2} & \frac{-\sqrt{2}c_{tk}}{2} & c_{tk} \end{bmatrix} \quad (24)$$

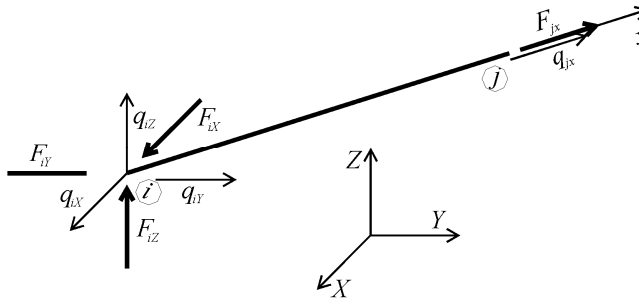
4.2. Element STM-3D

Uogólnimy nasze rozważania dla układów przestrzennych. Na Rys. 7 oraz Rys. 8 przedstawiono siły, działające na element w układzie lokalnym i globalnym.



Rys. 7. Schemat elementu strojonego tłumika masowego (STM-3D) w układzie lokalnym.

Fig. 7. Scheme of the tuned mass damper element (TMD-3D) in the local coordinate system.



Rys. 8. Schemat elementu strojonego tłumika masowego (STM-3D) w układzie globalnym.

Fig. 8. Scheme of the tuned mass damper element (TMD-3D) in the global coordinate system.

Podobnie jak w poprzednim przypadku, dla elementu płaskiego, do układu globalnego transformujemy tylko węzeł początkowy i STM. Węzeł końcowy pozostaje w układzie lokalnym (związany z kierunkiem działania tłumika). Poniżej przedstawiono wektory przemieszczeń węzłowych elementu oraz sił węzłowych w układzie lokalnym:

$$\mathbf{q}_k^e = \begin{bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{iz} \\ q_{jx} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_k^e = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \\ F_{jx} \end{bmatrix} \quad (25)$$

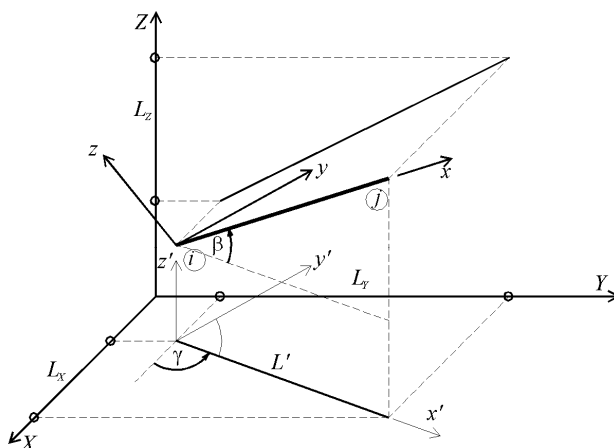
zaś w układzie globalnym:

$$\mathbf{q}_k^e = \begin{bmatrix} q_{iX} \\ q_{iY} \\ q_{iZ} \\ q_{jX} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_k^e = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{iZ} \\ F_{jX} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Macierze \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e dla k -tego WSTM w lokalnym układzie współrzędnych mają następujące postaci:

$$\mathbf{M}_k^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{tk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{tk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{tk} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_k^e = \begin{bmatrix} k_{tk} & 0 & 0 & -k_{tk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{tk} & 0 & 0 & k_{tk} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{C}_k^e = \begin{bmatrix} c_{tk} & 0 & 0 & -c_{tk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{tk} & 0 & 0 & c_{tk} \end{bmatrix} \quad (28)$$



Rys. 9. Schemat elementu strojonego tłumika masowego (STM-3D) w układzie globalnym.

Fig. 9. Scheme of the tuned mass damper element (TMD-3D) in the global coordinate system.

Podobnie jak dla elementu STM-2D w macierzy mas \mathbf{M} , masa na kierunku y oraz z została skupiona w węźle początkowym i , zaś na kierunku x w węźle końcowym.

Transformacja poszczególnych macierzy elementu z układu lokalnego do globalnego odbywa się za pomocą wzorów (14). Na Rys. 9 przedstawiono podstawowe oznaczenia, służące do uzyskania macierzy obrotu węzła (por. Rakowski G. i inni (1992) [3], Błazik-Borowa i Podgórski, 2001 [4]).

Tak jak już wspomniano, węzeł końcowy j pokrywa się z węzłem i , wtedy linia pomiędzy tymi węzłami, jest interpretowana jako wektor kierunkowy działania STM $\mathbf{w}_k = [L_x, L_y, L_z]$. Kierunek lokalnej osi x , jest zawsze wybierany wzdłuż wektora kierunkowego \mathbf{w}_k , kierunek y , tak aby oś y była równoległa do płaszczyzny XY układu globalnego. Obrót z układu lokalnego do globalnego złożony jest z dwóch obrotów pośrednich. Najpierw obracamy układ xyz o kąt β do pośredniego układu $x'y'z'$, dobranego tak, aby oś x' była równoległa do płaszczyzny XY , a następnie obracamy układ $x'y'z'$ o kąt γ , tak, aby osie x' oraz X były równoległe. Macierze obrotu o kąt β oraz o kąt γ będą miały następujące postaci:

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & -s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

gdzie: $s_\beta = \sin \beta = L_z / L$, $c_\beta = \cos \beta = L' / L$, $s_\gamma = \sin \gamma = L_y / L'$, $c_\gamma = \cos \gamma = L_x / L'$, $L' = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$, $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$

Złożenie dwóch obrotów dla węzła początkowego i , daje poszukiwaną macierz obrotu:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i\gamma} \mathbf{R}_{i\beta} = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & -s_\gamma & -c_\gamma s_\beta \\ s_\gamma c_\beta & c_\gamma & -s_\gamma s_\beta \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \quad (30)$$

Pełna macierz obrotu elementu STM-3D będzie miała następującą postać:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & -s_\gamma & -c_\gamma s_\beta & 0 \\ s_\gamma c_\beta & c_\gamma & -s_\gamma s_\beta & 0 \\ s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Podane wzory na macierze \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e mają zastosowanie dla dowolnego kierunku działania STM podanego wektorem kierunkowym $\mathbf{w}_k = [L_x, L_y, L_z]$. Postać macierzy obrotu węzła początkowego jest identyczna jak dla kratownicy przestrzennej. Należy pamiętać, że zastosowanie elementów STM-2D czy STM-3D powoduje każdorazowo zwiększenie o jeden stopień swobody liczbę stopni swobody całego układu. Przesunięcia, prędkości i przyspieszenia związane z tym stopniem swobody są zawsze zgodne z lokalnym układem współrzędnych, określonym przez wektor kierunkowy $\mathbf{w}_k = [L_x, L_y, L_z]$.

4.3. Agregacja macierzy dla układu dynamicznego

Agregacja macierzy poszczególnych elementów STM-2D oraz STM-3D odbywa się w sposób analogiczny jak dla innych elementów znanych z MES. Może być przeprowadzona w sposób bezpośredni, gdzie dla każdego elementu tworzona jest macierz połączeń (przylegania), zawierająca relacje pomiędzy lokalnymi stopniami swobody a uporządkowanymi i przeniechanymi globalnymi stopniami swobody. Macierz połączeń elementu A^e jest prostokątna. Liczba wierszy tej macierzy jest równa liczbie globalnych stopni swobody (w rozpatrywanym przypadku $N + N_t$), zaś liczba kolumn równa jest liczbie stopni elementu (3 – dla STM-2D; 4 – dla STM-3D). Globalne macierze: mas, sztywności oraz tłumienia będą opisane wzorami:

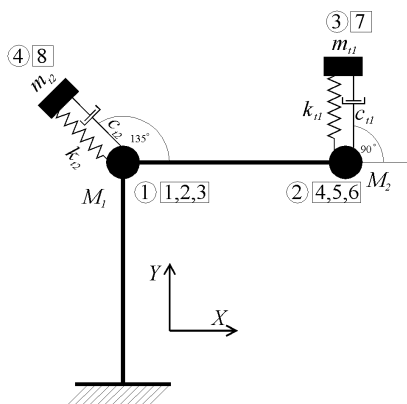
$$\mathbf{M}_T = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{A}^e \mathbf{M}_k^e (\mathbf{A}^e)^T \quad \mathbf{K}_T = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{A}^e \mathbf{K}_k^e (\mathbf{A}^e)^T \quad \mathbf{C}_T = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{A}^e \mathbf{C}_k^e (\mathbf{A}^e)^T \quad (32)$$

W komputerowej implementacji często stosuje się podejście wykorzystujące wektory alokacji. Są to wektory, które zawierają odniesienie lokalnych stopni swobody do przeniechanych globalnych stopni swobody. Przy tym podejściu, budowa globalnych macierzy \mathbf{M}_T , \mathbf{K}_T , \mathbf{C}_T odbywa się poprzez wstawianie odpowiednich bloków z macierzy \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e (bloków związanych ze stopniami swobody węzła początkowego i oraz węzła końcowego j) do globalnych macierzy na podstawie wektorów alokacji.

Należy jeszcze wspomnieć, iż macierze \mathbf{M}_T , \mathbf{K}_T , \mathbf{C}_T nie składają się z wydzielonych bloków o rozmiarze $N_T \times N_T$. Poszczególne podbloki macierzy \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e występują zarówno dla numerów stopni swobody $n_s < N$, jak i $N < n_s < N + N_t$.

5. Przykład budowy macierzy tłumienia

Rozpatrzony zostanie model płaskiego ustroju ramowego złożonego z dwu elementów, w postaci pokazanej na Rys. 1. Do ustroju zostaną dołączone dwa tłumiki: w węźle nr 1 tłumik usytuowany pod kątem $3\pi/4$, w węźle nr 2 pod kątem $1\pi/2$ w stosunku do układu globalnego. Globalna liczba stopni swobody układu z dołączonymi WSTM, wynosi $N + N_t = 8$.



Rys. 10. Schemat ustroju ramowego z WSTM.

Fig. 10. Scheme of the frame system with MTMD.

$$\mathbf{K}_{T2} = \begin{bmatrix} \frac{k_{t2}}{2} & \frac{-k_{t2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}k_{t2}}{2} \\ \frac{-k_{t2}}{2} & \frac{k_{t2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{2}k_{t2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}k_{t2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}k_{t2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{t2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{C}_{T2} = \begin{bmatrix} \frac{c_{t2}}{2} & \frac{-c_{t2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}c_{t2}}{2} \\ \frac{-c_{t2}}{2} & \frac{c_{t2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{2}c_{t2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}c_{t2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}c_{t2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{t2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

6. Podsumowanie

W literaturze bardzo często buduje się od podstaw równania ruchu układu z dołączonymi WSTM. Dla każdego przykładu obliczeniowego prowadzona jest cała analiza postaci macierzy globalnych \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} . Takie podejście możemy znaleźć w pracach: Xu i in. (1999) [5], Lewandowski R. (2006) [6], Lewandowski i Grzymisławska (2009) [7]. Zastosowanie elementów STM-2D oraz STM-3D, umożliwia potraktowanie problemu jako standardowego problemu MES w którym są wykorzystywane nowe elementy STM-2D oraz STM-3D. Wprowadzenie tych elementów umożliwia analizowanie układów do których dołączono WSTM o kierunkach działania niekoniecznie zgodnych z globalnymi kierunkami X, Y, Z. Ma to bardzo duże znaczenie praktyczne dla układów o bardzo skomplikowanej geometrii oraz skomplikowanych formach drgań, gdzie może zająć konieczność zastosowania STM na kierunku nie zgodnym z osiami globalnego układu współrzędnych XYZ.

Literatura

- [1] Wielgos P., *Równania ruchu konstrukcji głównej z dołączonymi tłumikami drgań opisanymi standardowym modelem reologicznym*, Budownictwo i Architektura 9(2) (2011) 23-38.

- 2] Wielgos P., *Ocena skuteczności działania wielokrotnych, strojonych tłumików masowych w konstrukcjach budowlanych*, Rozprawa doktorska, Lublin, 2010.
- [3] Rakowski G. i in., *Mechanika budowli: ujęcie komputerowe*, tom 2, Arkady, Warszawa, 1992.
- [4] Błazik-Borowa E., Podgórski J., *Wprowadzenie do metody elementów skończonych w statyce konstrukcji inżynierskich*, IZT, Lublin, 2001.
- [5] Xu Y.L., He Q., Ko J.M., *Dynamic response of damper-connected adjacent buildings under earthquake excitation*, Engineering Structures 21(2) (1999) 135–148.
- [6] Lewandowski R., *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2006.
- [7] Lewandowski R., Grzymisławska J., *Dynamic analysis of structures with Multiple Tuned Mass Dampers*, Journal of Civil Engineering and Management 15(1) (2009) 77–86.

The equations of motion of the main structure with attached multiple tuned mass dampers

Piotr Wielgos

*Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering and Architecture,
Lublin University of Technology, e-mail: p.wielgos@pollub.pl*

Abstract: A mathematical model of structure with multiple tuned mass dampers (MTMD) is presented in this paper. An important difficulty, connected with these model, is building a global damping matrix of the system. The own proposals FEM elements describing additional elements attached to the main system in the form of tuned dampers have been proposed here. The benefits of the new FEM elements have been briefly discussed.

Keywords: multiple tuned mass dampers, global damping matrix, FEM elements.